ΟΡΙΖΟΥΣΑ

$M(n\times n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \to \alpha \\ \qquad\quad\ \beta \\ \qquad\quad\ \gamma \\ \qquad\quad\ \alpha\gamma+\beta \\ \to tr\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha+\delta \\ \to \alpha+\beta+\gamma+\delta \end{array}\right\} \text{απεικονίσεις}$$

Ορισμός: Το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα $A=(a_{i,j})$ είναι το άθροισμα των στοιχείων κύριας διαγωνίου. $trA = a_{1,1}+a_{2,2}+\dots+a_{n,n} = \sum_{t=1}^{n} a_{t,t}$

Από όλες τις απεικονίσεις, υπάρχει μία, η ορίζουσα (determinant), η οποία δίνει σημαντικές πληροφορίες.

$$det : M(n\times n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{συνεχής}} \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Η ιδιότητά της:

$det(AB) = detA\, detB$

$det(A+B) \neq detA + detB$

Ελάσσονες πίνακες

$A_{n\times n}=(a_{ij})$

Με A_{ij} θα συμβολίζουμε τον $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα που δημιουργείται, αν από τον A διαγράψουμε την i-γραμμή κ' j-στήλη.

πχ $A=\begin{pmatrix}α & β\\ γ & δ\end{pmatrix}$ $A_{1,1}=δ$ $A_{1,2}=γ$ (διαγράφω 1η γραμμή κ' 2η στήλη;)

$A_{2,1}=β$ $A_{2,2}=α$

__άλλο πχ__ $A=\begin{pmatrix}α & β & γ\\ δ & ε & ζ\\ η & θ & ι\end{pmatrix}$ $A_{1,1}=\begin{pmatrix}ε & ζ\\ θ & ι\end{pmatrix}$ $A_{1,2}=\begin{pmatrix}δ & ζ\\ η & ι\end{pmatrix}$

$A_{1,3}=\begin{pmatrix}δ & ε\\ η & θ\end{pmatrix}$ $A_{2,1}=\begin{pmatrix}β & γ\\ θ & ι\end{pmatrix}$

$A_{2,2}=\begin{pmatrix}α & γ\\ η & ι\end{pmatrix}$ $A_{2,3}=\begin{pmatrix}α & β\\ η & θ\end{pmatrix}$ $A_{3,1}=\begin{pmatrix}β & γ\\ ε & ζ\end{pmatrix}$

$A_{3,2}=\begin{pmatrix}α & γ\\ δ & ζ\end{pmatrix}$ $A_{3,3}=\begin{pmatrix}α & β\\ δ & ε\end{pmatrix}$

Ορίζουμε την ορίζουσα επαγωγικά στη διάσταση του πίνακα.

$n=1$ $A=(α)$ $\det A=α$

$n=2$ $A=\begin{pmatrix}α & β\\ γ & δ\end{pmatrix}$ $\det A=αδ-γβ$

$\det A=(+1)α\det(A_{1,1})+(-1)γ\det(A_{2,1})$

$\underline{αδ-γβ}$

$n=3$ $\det A=(+1)α\det(A_{1,1})+(-1)δ\det A_{2,1}+(+1)η\det A_{3,1}=$

$=α\det\begin{pmatrix}ε & ζ\\ θ & ι\end{pmatrix}-δ\det\begin{pmatrix}β & γ\\ θ & ι\end{pmatrix}+η\det\begin{pmatrix}β & γ\\ ε & ζ\end{pmatrix}=$

$=α(ει-θζ)-δ(βι-γθ)+η(βζ-εγ)=$

$=αει-δθγ+ηβζ-αθζ-δβι-ηεγ$ (επιλεκτικά έκανε, idk γιατί τα έγραψε μπερδεμένα)

Sarrus 3x3 μόνο

$$\left(\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{matrix}\right) \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{matrix}$$

<u>Ορισμός:</u> Έστω $A_{n\times n} = (a_{i,j})$.
Η ορίζουσα του A δίνεται από τον τύπο:

$$\det A = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+1} a_{t,1} \det(A_{t,1})$$

Αν ένας υπολογιστής κάνει 10^{12} πράξεις/sec, τότε θα χρειαστεί 500.000 χρόνια για να υπολογίσει την ορίζουσα ενός 25x25 πίνακα.

<u>Πρόταση:</u> Αν ο A είναι άνω ή κάτω τριγωνικός, τότε $\det A = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$

π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & * \\ & a_{2,2} & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Με επαγωγή στο n: $n=1$ $A=(a_{1,1})$
$\det A = a_{1,1}$ δεν ελέγχουμε τίποτα.
$n=2$ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{1,1}\det(A_{1,1}) - \cancel{\overset{0}{a_{2,1}}\det(A_{2,1})}$$

$\det A_{1,1} = a_{2,2} \Rightarrow \det A = a_{1,1}a_{2,2}$

$n=3$ $\det A = a_{1,1}\det A_{1,1} - \overset{0}{a_{2,1}}\det A_{2,1} + \overset{0}{a_{3,1}}\det A_{3,1}$

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Άνω τριγωνικός. Από επαγωγή $\det A_{1,1} = a_{2,2}a_{3,3}$. Το ίδιο για τον n. Υποθέτουμε ότι ισχύει για τους άνω τριγωνικούς $(n-1)\times(n-1)$ κ' εφαρμόζουμε την ίδια μέθοδο.

Κάτω τριγωνικός.
$n=1$ $A=(a_{1,1}) \to \det A = a_{1,1}$
$n=2$ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{2,1}\overset{0}{\det A_{2,1}} = a_{1,1}a_{2,2}$$

$n=3 \quad A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{1,1}\underbrace{\det A_{1,1}}_{a_{2,2}a_{3,3}} - a_{2,1}\underbrace{\det A_{2,1}}_{0} + a_{3,1}\underbrace{\det A_{3,1}}_{0} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$$

Το ίδιο για $n\times n$ όταν υποθέτουμε ότι ισχύει για $(n-1)\times(n-1)$

Πόρισμα: $\det M_i(a) = a$

$\det(A_{i,j}(a)) = 1$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & & \\ & a & \\ & & 1 \end{pmatrix} = a \qquad \det(A_{i,j}(a)) = \det\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ a & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\det E_{i,j}$

Θεώρημα: Έστω A ένας $n\times n$ πίνακας

(i) Αν ο B προκύπτει από τη γραμμοπράξη $M_i(a)A$, τότε $\det B = a\det A$

(ii) Αν ο B προκύπτει από την γραμμοπράξη $E_{i,j}A$, τότε $\det B = -\det A$.

Απόδειξη: Επαγωγή στο n

(i) $n=1 \quad B = aA = (a a_{1,1}) \Rightarrow \det B = a a_{1,1} = a\det A$

$n=2 \quad B=\begin{pmatrix} a a_{1,1} & a a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a a_{2,1} & a a_{2,2} \end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix} {}^{+}a_{1,1} & {}^{-}a_{1,2} \\ {}^{-}a a_{1,2} & {}^{+}a a_{2,2} \end{pmatrix} \qquad \det B = a_{1,1}\underbrace{\det B_{1,1}}_{a\det A_{1,1}} - a a_{2,1}\det B_{2,1}$$

$a\det A_{1,1} - a a_{2,1}\det A_{2,1} =$

$= \det B = a(a_{1,1}\det A_{1,1} - a_{2,1}\det A_{2,1}) = a\det A$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλους τους μέχρι κ' $(n-1)\times(n-1)$. Θα το δείξουμε για $n\times n$ πίνακες.

Έχουμε πολ/σει την i-γραμμή του A με α

$$\det B=\sum_{t=1}^{n}(-1)^{t+1}b_{t,1}\det B_{t,1}=\sum_{t=1,\,t\neq i}^{n}(-1)^{t+1}b_{t,1}\det B_{t,1}+(-1)^{i+1}b_{i,1}\det B_{i,1}$$

$t\neq i \to b_{t,1}=a_{t,1}$ $\quad B_{t,1}=\alpha A_{t,1}$ όπου

$b_{t,1}=\alpha a_{i,1}$ $\quad B_{i,1}=A_{i,1}$

έχουμε πολ/σει την i με α. $\det B_{t,1}=\alpha\det A_{t,1}$ από επαγωγή.

$$\det B=\sum_{t=1,\,t\neq i}^{n}(-1)^{t+1}a_{t,1}\,\alpha\det A_{t,1}+(-1)^{i+1}\alpha\, a_{i,1}\det A_{i,1}=\alpha\det A=\det M_i(\alpha)\det A$$

$$\det B=\det(M_i(\alpha)A)=\det M_i(\alpha)\det A$$

(ii) Θα αποδείξουμε την ιδιότητα για την εναλλαγή $i\leftrightarrow i+1$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,n}\\ & \\ a_{i,1} & a_{i,n}\\ a_{i+1,1} & a_{i+1,n}\\ a_{n,1} & a_{n,n}\end{pmatrix}=A \qquad E_{i,i+1}=B=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,n}\\ & \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,n}\\ a_{i,1} & a_{i,n}\\ a_{i+2,1} & a_{i+2,n}\\ \vdots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,n}\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{-γραμμή}\\ i+1\text{-γραμμή}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\det B=\sum_{\substack{t=1\\ t\neq i,\,i+1}}^{n}(-1)^{t+1}\,b_{t,1}\det B_{t,1}=\quad b_{t,1}=a_{t,1}$$

$B_{t,1}$ = προέρχεται από τον $A_{t,1}$ με εναλλαγή των i κ' $i+1$

$\det B_{t,1}=-\det A_{t,1}$

$b_{i,1}=a_{i+1,1}$ $\quad B_{i,1}=A_{i+1,1}$

$b_{i+1,1} = a_{i,1}$ $\quad B_{i+1,1} = A_{i,1}$

$\det B = \sum_{\substack{t=1 \\ t\neq i,i+1}}^{n} (-1)^{t+1} b_{t,1} \det B_{t,1} + (-1)^{i+1} b_{i,1} \det B_{i,1} + (-1)^{i+2} b_{i+1,1} \det B_{i+1,1} =$

$= \sum_{\substack{t=1 \\ t\neq i,i+1}}^{n} (-1)^{t+1} a_{t,1} (-1) \det A_{t,1} + (-1)^{i+2} a_{i+1,1} \det A_{i+1,1} + (-1)^{i+2} a_{i,1} \det A_{i,1} =$

Σαν να πολ/ζω με το (-1);;;; $\quad (-1)(-1)^{i+1}$

$= (-1) \det A$

Κάθε φορά που εναλλάσσουμε δύο συνεχόμενες γραμμές εμφανίζεται ένα (-1) μπροστά.

Γενική περίπτωση:

$$\begin{array}{c} \\ i \to \\ j \to \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{j,1} & & a_{j,n} \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$j-i$ θέσεις μετά

$a_{i+1} \ldots a_{(+1)n}$

$a_{i+2,1} \ldots a_{i+2,n}$

$\vdots$

$a_{j,1} \quad a_{j,n}$

$j-i-1$ θέσεις στη πάνω η j-γραμμή

Συνολικά, κάνουμε $j-i+(j-i-1)$ αλλαγές. Άρα πολ/με την ορίζουσα του A με $(-1)^{j-i+j-1} = (-1)^{2(j-i)} (-1)^{-1} = -1$

Άρα $\det B = -1 \det A$